Bab 1

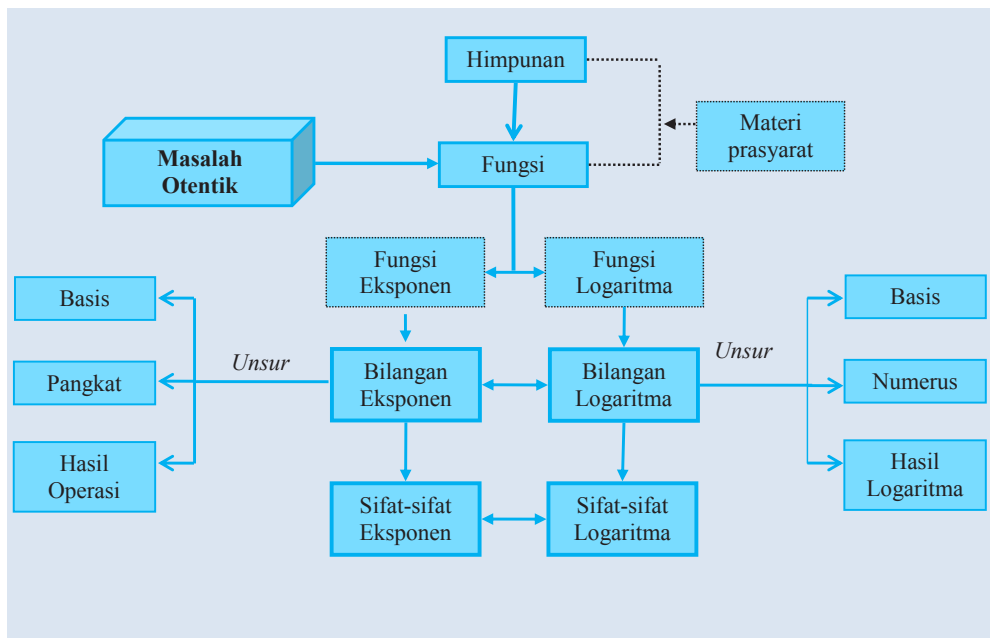
Eksponen dan Logaritma

A. KOMPETENSI DASAR DAN PENGALAMAN BELAJAR

Kompetensi Dasar	Pengalaman Belajar
Setelah mengikuti pembelajaran eksponen dan logaritma siswa mampu: 1. menghayati pola hidup disiplin, kritis, bertanggungjawab, konsisten dan jujur serta menerapkannya dalam kehidupan sehari-hari; 2. memilih dan menerapkan aturan eksponen dan logaritma sesuai dengan karakteristik permasalahan yang akan diselesaikan dan memeriksa kebenaran langkah-langkahnya; 3. menyajikan masalah nyata menggunakan operasi aljabar berupa eksponen dan logaritma serta menyelesaikannya menggunakan sifat-sifat dan aturan yang telah terbukti kebenarannya.	Melalui pembelajaran materi eksponen dan logaritma, siswa memperoleh pengalaman belajar: • mengkomunikasikan karakteristik masalah otentik yang pemecahannya terkait eksponen dan logaritma; • merancang model Matematika dari sebuah permasalahan autentik yang berkaitan dengan eksponen dan logaritma; • menyelesaikan model Matematika untuk memperoleh solusi permasalahan yang diberikan; • menafsirkan hasil pemecahan masalah; • membuktikan berbagai sifat terkait eksponen dan logaritma; • menuliskan dengan kata-katanya sendiri konsep persamaan kuadrat.berdasarkan ciri-ciri yang dituliskan sebelumnya; • membuktikan sifat-sifat dan aturan matematika yang berkaitan dengan eksponen dan logaritma berdasarkan konsep yang sudah dimiliki; • menerapkan berbagai sifat eksponen dan logaritma dalam pemecahan masalah.

Istilah Penting

- *Bilangan Pokok (Basis)*
- *Perpangkatan*
- *Eksponen*
- *Logaritma*

B. PETA KONSEP

C. MATERI PEMBELAJARAN

Banyak permasalahan kehidupan yang penyelesaiannya terkait dengan konsep dan aturan-aturan dalam matematika. Untuk itu perhatikan dan selesaikan dengan cermat permasalahan-permasalahan yang diberikan. Di dalam proses pemecahan masalah-masalah yang diberikan, kamu cermati objek-objek yang dilibatkan dalam permasalahan yang diberikan. Objek-objek itu menjadi bahan aspirasi/inspirasi, karena terkadang ada konsep matematika melekat pada objek itu yang tidak kita sadari dan ternyata sebagai kata kunci dalam penyelesaian masalah. Demikian juga kamu tidak boleh mengabaikan atau melupakan konsep-konsep dan aturan-aturan matematika yang telah dipelajari sebelumnya, baik di tingkat SD/MI, SMP/MTs, bahkan pada materi yang baru saja kamu pelajari.

Pegang teguh sifat matematika; yaitu, matematika bersandar pada kesepakatan, saling terkait materinya, menggunakan variabel-variabel, dan bersifat abstrak sebab matematika adalah hasil abstraksi pemikiran manusia. Matematika menganut kebenaran konsistensi; artinya, tidak boleh ada di dalamnya unsur-unsur, simbol-simbol, konsep-konsep, rumus-rumus yang saling bertentangan. Jika sebuah konsep ditemukan, ukuran kebenarannya adalah apabila konsep tersebut diterima pada struktur matematika yang sudah ada sebelumnya. Jika prinsip (rumus-rumus, sifat-sifat) yang ditemukan, ukuran kebenarannya dapat dibuktikan kebenarannya menggunakan konsep atau aturan yang sudah ada sebelumnya.

1. Menemukan Konsep Eksponen

Untuk menemukan konsep eksponen, kamu selesaikan masalah yang disajikan di bawah ini secara berkelanjutan. Kamu lebih dahulu berusaha memikirkan, berupaya mencari ide-ide kreatif, berdiskusi, mencoba memecahkan masalah di dalam kelompok belajar. Dari beberapa model matematika yang melibatkan eksponen, kamu secara individu menuliskan ciri-ciri eksponen dan mendiskusikan hasilnya dengan temanmu. Berdasarkan ciri-ciri tersebut, kamu menuliskan konsep eksponen dengan pemahaman sendiri.

Masalah-1.1

Seorang peneliti bidang mikrobiologi di sebuah lembaga penelitian sedang mengamati pertumbuhan suatu bakteri di sebuah laboratorium mikrobiologi. Pada kultur bakteri tersebut, satu bakteri membelah menjadi r bakteri setiap jam. Hasil pengamatan menunjukkan bahwa jumlah bakteri pada akhir 3 jam adalah 10.000 bakteri dan setelah 2 jam kemudian, jumlah bakteri tersebut menjadi 40.000 bakteri. Peneliti tersebut ingin mengetahui banyak bakteri sebagai hasil pembelahan dan mencari tahu banyak bakteri dalam waktu 8 jam.

Alternatif Penyelesaian

Diketahui:

Satu bakteri membelah menjadi r bakteri untuk setiap jam.

Jumlah bakteri pada akhir 3 jam adalah 10.000 bakteri dan setelah 2 jam kemudian, jumlahnya menjadi 40.000 bakteri.

Ditanya:

a. Berapa banyak bakteri sebagai hasil pembelahan.

b. Berapa jumlah bakteri dalam waktu 8 jam.

Sebagai langkah awal buat tabel laju pertumbuhan bakteri terhadap waktu setiap jam.

Misalkan jumlah bakteri pada awalnya ($t = 0$) adalah x_0. Isilah tabel berikut!

Jam ke-t	0	1	....	....	....	....
Jumlah bakteri (x_t)	x_0	rx_0	....	....	....	....

Dari hasil pengamatan data pada tabel di atas, kita dapat membuat hubungan pertumbuhan jumlah bakteri (x_t) tersebut terhadap perubahan waktu (t).

$x_t = \underbrace{r \times r \times r \times \ldots \times r}_{t \text{ faktor}} \times x_0$ atau secara ringkas ditulis

$$x_t = r^t x_0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

dengan t dalam jam, x_0 adalah jumlah bakteri saat $t = 0$ dan r adalah banyak bakteri setelah pembelahan terjadi pada setiap jam.

Pada Masalah-1.1 diketahui bahwa pada akhir 3 jam terdapat 10.000 bakteri dan setelah 5 jam terdapat 40.000 bakteri. Kita substitusi ke formula di atas, maka diperoleh $x_3 = r^3x_0 = 10.000$ dan $x_5 = r^5x_0 = 40.000$

$$\frac{x_5}{x_3} = \frac{40.000}{10.000}$$

$$\frac{r^5 x_0}{r^3 x_0} = 4$$

$$r^2 = 4$$

$$r = 2$$

Jadi, peneliti tersebut menemukan bahwa setiap jam 1 bakteri membelah menjadi 2 bakteri.

Untuk mendapatkan banyak bakteri pada awalnya atau $t = 0$, substitusi $r = 2$ ke persamaan $r^3x_0 = 10.000$ sehingga $8x_0 = 10.000$. Dengan demikian $x_0 = 1.250$.

Subtitusikan x_0 = 1.250 ke persamaan (1), pola pertumbuhan bakteri tersebut dinyatakan

$$x_t = 1250.2^{\frac{t}{15}}$$

$$x_8 = (2^8)(1250)$$

$$= 320.000$$

Dalam Masalah-1.1, ditemukan $r^2 = 4$ maka $r = 2$. Apakah $r = -2$ tidak berlaku? Berikan alasanmu.

Jadi, setelah 8 jam, peneliti mendapatkan jumlah bakteri sudah mencapai 320.000 bakteri.

Masalah-1.2

Diberikan selembar kertas berbentuk persegi panjang. Lipatlah kertas tersebut di tengah-tengah sehingga garis lipatan membagi dua bidang kertas menjadi dua bagian yang sama. Temukanlah pola yang menyatakan hubungan banyak lipatan dengan banyak bidang kertas yang terbentuk.

Alternatif Penyelesaian

Sebagai langkah awal buat tabel keterkaitan antara banyak lipatan dengan banyak bidang kertas yang terbentuk.

Banyak Lipatan	Banyak Bidang Kertas	Pola Perkalian
1	2	2 = 2
2	4	4 = 2 × 2
3	8	8 = 2 × 2 × 2
4	...	...
5	...	...
N	...	...

Berdasarkan tabel di atas, misalkan k adalah banyak bidang kertas yang terbentuk sebagai hasil lipatan bidang permukaan kertas menjadi dua bagian yang sama, n adalah banyak lipatan.

k dapat dinyatakan dalam n, yaitu

$k_n = 2^n$ .... (2)

Coba kamu uji kebenaran persamaan $k_n = a^n$ dengan mensubtitusikan nilai n dan a ke persamaan tersebut.

Berdasarkan persamaan (1) dan (2), diperoleh
Dari persamaan (1) $x_t = r^t x_0$, r adalah bilangan pokok dan t adalah eksponen dari r.
Dari persamaan (2) $k_n = a^n$, a adalah bilangan pokok dan n adalah eksponen dari a.
Untuk menyederhanakan penulisan hasil kali bilangan yang sama, kita dapat menggunakan *notasi pangkat*. Bilangan berpangkat didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 1.1

Misalkan a bilangan real dan n bilangan bulat positif. a^n adalah hasil kali bilangan a sebanyak n faktor, dapat ditulis $a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ faktor}}$ dengan a sebagai *basis* bilangan pokok dan n sebagai pangkat.

Catatan:
1. Pada Definisi-1.1 di atas, kita sepakati, a^1 cukup ditulis a.
2. Hati-hati dengan bilangan pokok $a = 0$, tidak semua a^0 dengan a bilangan real hasilnya adalah 1. Coba tanyakan pada gurumu, mengapa demikian?
3. Jika n adalah sebuah variabel (variabel sebagai eksponen dari a), maka perlu dicermati semestanya dimana variabel itu dibicarakan. Sebab $a^n = a \times a \times \ldots \times a$ sebanyak n faktor, ini hanya berlaku ketika semesta $n \in N$.

Perhatikan Masalah-1.3 berikut!

Masalah-1.3

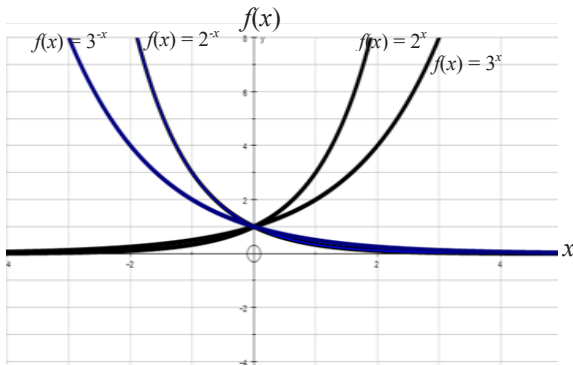
Suatu zat yang disuntikkan ke dalam tubuh manusia akan dikeluarkan dari darah melalui ginjal. Setiap 1 jam separuh zat itu dikeluarkan oleh ginjal. Bila 100 mg zat itu disuntikkan ke tubuh manusia, berapa miligram zat itu yang tersisa dalam darah setelah:
1) t = 1 jam?
2) t = 2 jam?
3) t = 3 jam?
4) Buatlah model matematika pengurangan zat tersebut dari tubuh melalui ginjal!
5) Gambarlah grafik model persamaan yang ditemukan!

Alternatif Penyelesaian

Langkah awal isilah tabel berikut:

t	1	2	3	4	5	6	7	8
Jumlah zat $z(t)$	50	25	12,5	...	...	...	...	...

Isilah secara lengkap data pada tabel dan coba gambarkan pasangan titik-titik tersebut pada sistem koordinat kartesius!

Selanjutnya perhatikan grafik fungsi (Gambar 1.1) di bawah ini. Isilah nilai-nilai yang dilalui fungsi tersebut dan sajikan nilai-nilai tersebut pada tabel yang diberikan.

Gambar 1.1 Grafik fungsi eksponen

	x							
	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
$f(x) = 2^x$								
$f(x) = 2^{-x}$								
$f(x) = 3^x$								
$f(x) = 3^{-x}$								

Latihan 1.1

Amati grafik di atas. Tuliskan sedikitnya 5 (lima) sifat grafik fungsi eksponen dan presentasi hasilnya di depan kelas. Dalam paparan jelaskan mengapa kita perlu mengetahui sifat-sifat tersebut!

Definisi 1.2

Fungsi Eksponen adalah suatu fungsi yang dinyatakan dalam bentuk $y = f(x) = a(b^{cx})$ dengan a, b, dan c bilangan real.
x adalah variabel
b adalah bilangan pokok atau basis
c adalah koefisien x
cx adalah eksponen dari b.

2. Pangkat Bulat Negatif

Definisi 1.3

Untuk a bilangan real dan $a \neq 0$, m bilangan bulat positif, didefinisikan

$$a^{-m} = \left(\frac{1}{a}\right)^m$$

Definisi di atas dijelaskan sebagai berikut:

$$a^{-m} = \left(\frac{1}{a}\right)^m = \underbrace{\left(\frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{a}\right)\cdots\left(\frac{1}{a}\right)}_{\text{sebanyak } m \text{ faktor}}$$

$$= \frac{1}{\underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{m \text{ faktor}}}$$

$$= \frac{1}{a^m}$$

Contoh 1.1

Jika nilai $x = -2$ dan $y = 2$, tentukan nilai $x^{-3}\left(y^4\right) = \ldots.$

Penyelesaian:

$$x^{-3}\left(y^4\right) = \frac{y^4}{x^3} = \frac{2^4}{(-2)^3} = \frac{16}{-8} = -2$$

3. Pangkat Nol

Definisi 1.4

Untuk a bilangan real dan $a \neq 0$, maka $a^0 = 1$.

Untuk lebih memahami definisi di atas, perhatikan pola hasil pemangkatan bilangan-bilangan berikut dengan bilangan 0.

$2^3 = 8$	$3^3 = 27$
$2^2 = 4$	$3^2 = 9$
$2^1 = 2$	$3^1 = 3$
$2^0 = 1$	$3^0 = 1$

Perhatikan hasil pemangkatan 2 dengan 0, dan hasil pemangkatan 3 dengan 0, hasil pemangkatannya adalah 1.

4. Sifat-sifat Pangkat Bulat Positif

Coba buktikan sifat-sifat pangkat bulat positif menggunakan definisi bilangan berpangkat yang telah dipelajari sebelumnya.

Sifat-1

Jika a bilangan real, m dan n bilangan bulat positif maka $a^m \times a^n = a^{m+n}$

Bukti:

$$a^m \times a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{m \text{ faktor}} \times \underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ faktor}}$$

$$= \underbrace{a \times a \times a \times a \times a \times a}_{m+n}$$

$$= a^{m+n}$$

- Perhatikan $a^m = \underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{m \text{ faktor}}$.

  Diskusikan dalam kelompokmu, apakah benar perpangkatan adalah perkalian berulang?
- Bagaimana jika a bukan bilangan?
- Bagaimana jika m dan n bukan bilangan bulat positif?

Sifat-2

Jika a bilangan real dan $a \neq 0$, m dan n bilangan bulat positif, maka

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}.$$

Bukti:

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{\underbrace{a\times a\times a\times \ldots\times a}_{m\ faktor}}{\underbrace{a\times a\times a\times\ldots\times a}_{n\ faktor}} \text{ (sesuai definisi)}$$

- Pada persyaratan Sifat-2, Apa arti $a \neq 0$?
- Bagaimana jika $a = 0$? Apa dampaknya pada hasil pembagian? $\frac{a^m}{a^n}$? Jika kamu tidak tahu, tanya pada guru!

Pada Sifat-1 di atas, terkait bilangan bulat positif m dan n. Ada 3 (tiga) kemungkinan, yaitu (a) $m > n$, (b) $m = n$, dan (c) $m < n$.

a) Kasus $m > n$

Jika m dan n bilangan bulat positif dan $m > n$ maka $m - n > 0$. Dengan demikian

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{\underbrace{a\times a\times a\times\ldots\times a}_{m\ faktor}}{\underbrace{a\times a\times a\times\ldots\times a}_{n\ faktor}} = \frac{\underbrace{a\times a\times a\times\ldots\times a}_{n\ faktor}}{\underbrace{a\times a\times a\times\ldots\times a}_{n\ faktor}}\left(\underbrace{a\times a\times a\times\ldots\times a}_{(m-n)\ faktor}\right)$$

$$= \underbrace{a\times a\times a\times\ldots\times a}_{(m-n)\ faktor}$$

$$= a^{m-n}$$

Jadi $\frac{a^m}{a^n} = a^{(m-n)}$, dengan m, n bilangan bulat positif dan $m > n$

b) Kasus $m = n$

Jika $m = n$, maka $\frac{a^m}{a^n} = 1$.

Bukti:

$\frac{a^m}{a^n} = \frac{a^m}{a^m}$, sebab $m = n$

$$= \frac{\underbrace{a\times a\times a\times\ldots\times a}_{m\ faktor}}{\underbrace{a\times a\times a\times\ldots\times a}_{m\ faktor}}$$

$= 1$

$= a^0$ (hal ini sesuai dengan Definisi 1.4).

$= a^{m-n}$

Latihan 1.2

Buktikan sendiri untuk $m < n$. Jelaskan perbedaan hasilnya dengan kasus (a).

Sifat-3

Jika a bilangan real dan $a \neq 0$, m dan n adalah bilangan bulat positif, maka $(a^m)^n = a^{mn}$

Bukti:

$$\left(a^m\right)^n = \underbrace{a^m \times a^m \times a^m \times \ldots \times a^m}_{n \text{ faktor}}$$

$$= \underbrace{\left(\underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{m \text{ faktor}}\right)\left(\underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{m \text{ faktor}}\right)\left(\underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{m \text{ faktor}}\right)\ldots\left(\underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{m \text{ faktor}}\right)}_{n \text{ faktor}}$$

$$= \left(\underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{m \times n \text{ faktor}}\right)$$

$\left(a^m\right)^n = a^{m \times n}$ (terbukti)

Definisi 1.4

Misalkan a bilangan real dan $a \neq 0$, m bilangan bulat positif. $a^{\frac{1}{m}} = p$ adalah bilangan real positif, sehingga $p^m = a$.

Diskusi

Diskusikan dengan temanmu, apakah syarat *m* dan *n* bilangan positif diperlukan untuk Sifat 3 dan Sifat 4. Bagaimana jika *m* dan *n* adalah salah satu atau keduanya bilangan negatif.

Contoh 1.2

(a) Buktikan jika $a \in R$, $a > 1$ dan $n > m$, maka $a^n > a^m$!

Bukti:

Karena $a > 1$ dan $n > m$ maka $n - m > 0$ dan $a^n > 0$, $a^m > 0$. Akibatnya, berlaku

$\Leftrightarrow \quad \dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ (Lihat Sifat-1 di atas)

$\Leftrightarrow \quad \dfrac{a^n}{a^m} > 1$ (Mengapa $\dfrac{a^n}{a^m} > 1$? Beri alasanmu!)

$\Leftrightarrow \quad \dfrac{a^n}{a^m} \times a^m > 1 \times a^m$ (Karena $a^m > 0$)

$\Leftrightarrow \quad a^n > a^m$ (terbukti)

(b) Perlukah syarat $a > 1$?

Misalkan kita ambil a bilangan real yang memenuhi $a < 1$ dan $n > m$. Apakah yang terjadi?

Pilih $a = -2$, dengan $n > m$, pilih $n = 3$ dan $m = 2$, apakah yang terjadi?

$(-2)^3 = (-2) \times (-2) \times (-2) = -8$

$(-2)^2 = (-2) \times (-2) = 4$

Dengan demikian, $a^n = -8 < 4 = a^m$ atau $a^n < a^m$. Jadi, tidak benar bahwa $a^n > a^m$ bila $a < 1$ dan $n > m$. Jadi, syarat a adalah bilangan real, dan $a > 1$ dan $n > m$ tidak boleh dikurangi (syarat cukup) untuk membuktikan $a^n > a^m$.

Diskusi

Berdiskusilah dengan temanmu satu kelompok. Analisis pernyataan pada Contoh 1.2!

- Apa akibatnya bila syarat $a > 1$ tidak dipenuhi?
- Perlukah diperkuat dengan syarat $n > m > 0$? Jelaskan!
- Bolehkah syarat $a > 1$ di atas diganti $a \geq 1$? Jelaskan!
- Bila tidak boleh, modifikasi ketentuan di atas supaya berlaku untuk $a \geq 1$. Bagaimanakah bila $0 < a < 1$ dan $a < 0$?
- Buat aturan hubungan antara a^n dan a^m untuk bermacam-macam nilai a di atas!
- Buat laporan terkait hasil diskusi kelompokmu.

Contoh 1.3

Terapkan berbagai sifat eksponen untuk menentukan hasil operasi bilangan pada soal yang disajikan pada contoh. Ujilah kebenaran hasilnya!

1. $2^2 \times 2^5 = \underbrace{2 \times 2}_{2\ \textit{faktor}} \times \underbrace{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}_{5\ \textit{faktor}}$ dengan menggunakan Sifat-1

$$= \underbrace{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}_{7\ \textit{faktor}}$$
$$= 2^7$$
$$= 2^{2+5}$$

2. $\dfrac{2^5}{2^5} = \dfrac{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2} = 1$ dengan menggunakan Sifat-2 kasus b

$$= 2^0$$

3. $\left(2^3\right)^2 = \left(2^3\right) \times \left(2^3\right)$ dengan menggunakan Sifat-3

$$= \underbrace{(2 \times 2 \times 2)}_{3\ \textit{faktor}} \times \underbrace{(2 \times 2 \times 2)}_{3\ \textit{faktor}}$$
$$= \underbrace{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}_{6\ \textit{faktor}}$$
$$= 2^6$$

4. $(2 \times 3)^3 = (2 \times 3) \times (2 \times 3) \times (2 \times 3)$ dengan menggunakan Definisi 1.1

$$= \underbrace{2 \times 2 \times 2}_{3\ \textit{faktor}} \times \underbrace{3 \times 3 \times 3}_{3\ \textit{faktor}}$$
$$= 2^3 \times 3^3$$

5. $\left(\dfrac{2}{3}\right)^3 = \left(\dfrac{2}{3}\right) \times \left(\dfrac{2}{3}\right) \times \left(\dfrac{2}{3}\right)$ dengan menggunakan Definisi 1.1

$$= \frac{\overbrace{2 \times 2 \times 2}^{3\ \textit{faktor}}}{\underbrace{3 \times 3 \times 3}_{3\ \textit{faktor}}}$$
$$= \frac{2^3}{3^3}$$

Diskusi

- Diskusikan dengan temanmu untuk memperoleh rumus perpangkatan sebagai hasil pemahaman terhadap Contoh 1.4 dan Contoh 1.5 di atas. Masih ingatkah kamu, disebut sifat apakah dalam konsep perkalian?
- Buat laporan hasil diskusi kelompokmu.

Contoh 1.4

Buktikan jika $a > 1$ dan $n > m$ dengan n dan m bilangan bulat negatif maka $a^n > a^m$.

Bukti:

Karena $n > m$ dengan n dan m bilangan bulat negatif, maka $-n$ dan $-m$ adalah bilangan bulat positif dan $-m > -n$.

Karena $a > 1$ maka $\dfrac{a^{-m}}{a^{-n}} = \dfrac{a^n}{a^m} > 1$ (Gunakan sifat $a^{-m} = \dfrac{1}{a^m}$).

$\dfrac{a^n}{a^m} > 1 \Leftrightarrow a^n > a^m$ (terbukti)

Contoh 1.5

Berdasarkan sifat bilangan 7, tentukan bilangan satuan dari 7^{1234} tanpa menghitung tuntas. Perhatikan bilangan satuan dari perpangkatan dari 7 berikut?

Perpangkatan 7	Nilai	Bilangan Satuan
7^1	7	7
7^2	49	9
7^3	343	3
7^4	2401	1
7^5	16807	7
7^6	117649	9
7^7	823543	3
7^8	5764801	1

Coba lanjutkan langkah berikutnya untuk menemukan bilangan satuan 7^{1234}. Cermati sifat satuan pada tabel di atas. Saat periode keberapakah berulang? Selanjutnya manfaatkan sifat-sifat perpangkatan dan perkalian bilangan berpangkat.

5. Pangkat Pecahan

Selanjutnya kita akan analisis sifat perpangkatan bilangan real dengan pangkat pecahan.

Definisi 1.5

Misalkan a bilangan real dan $a \neq 0$, m, n bilangan bulat positif didefinisikan $a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$.

Definisi 1.6

Misalkan a bilangan real dan $a \neq 0$ dengan $a > 0$, $\frac{p}{q}$ adalah bilangan pecahan $q \neq 0$. $q \geq 2$. $a^{\frac{p}{q}} = c$, sehingga $c = \sqrt[q]{a^p}$ atau $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$.

Sifat-4

Misalkan a adalah bilangan real dan $a \neq 0$ dengan $a > 0$, $\frac{p}{n}$ dan $\frac{m}{n}$ adalah bilangan pecahan $n \neq 0$. Jika $n, q \geq 2$ maka $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)\left(a^{\frac{p}{n}}\right) = (a)^{\frac{m+p}{n}}$.

Bukti:

Berdasarkan Sifat-4, jika a bilangan real dan $a \neq 0$, m, n adalah bilangan bulat positif, maka $a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$. Dengan demikian $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)\left(a^{\frac{p}{n}}\right) = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^p$

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)\left(a^{\frac{p}{n}}\right) = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^p \Leftrightarrow \left(\underbrace{a^{\frac{1}{n}} \times a^{\frac{1}{n}} \times a^{\frac{1}{n}} \times \ldots \times a^{\frac{1}{n}}}_{m \text{ faktor}}\right)\left(\underbrace{a^{\frac{1}{n}} \times a^{\frac{1}{n}} \times a^{\frac{1}{n}} \times \ldots \times a^{\frac{1}{n}}}_{p \text{ faktor}}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\underbrace{a^{\frac{1}{n}} \times a^{\frac{1}{n}} \times a^{\frac{1}{n}} \times \ldots \times a^{\frac{1}{n}}}_{m \text{ faktor}}\right)\left(\underbrace{a^{\frac{1}{n}} \times a^{\frac{1}{n}} \times a^{\frac{1}{n}} \times \ldots \times a^{\frac{1}{n}}}_{p \text{ faktor}}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\underbrace{a^{\frac{1}{n}} \times a^{\frac{1}{n}} \times a^{\frac{1}{n}} \times \ldots \times a^{\frac{1}{n}}}_{m+p \text{ faktor}} \right)$$

$$\Leftrightarrow \left(a^{\frac{1}{n}} \right)^{m+p} = (a)^{\frac{m+p}{n}} \quad \text{(Ingat Definisi 1.5) (terbukti)}$$

Jadi, jika a adalah bilangan real dengan $a > 0$, $\frac{p}{n}$ dan $\frac{m}{n}$ adalah bilangan pecahan dengan $n \neq 0$, serta n, $q \geq 2$ maka $\left(a^{\frac{m}{n}} \right)\left(a^{\frac{p}{n}} \right) = (a)^{\frac{m+p}{n}}$.

Sifat-5

Jika a adalah bilangan real dan $a \neq 0$ dengan $a > 0$, $\frac{m}{n}$ dan $\frac{p}{q}$ bilangan pecahan $q, n \neq 0$, maka $\left(a^{\frac{m}{n}} \right)\left(a^{\frac{p}{q}} \right) = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}$.

Uji Kompetensi 1.1

1. Sederhanakanlah operasi bilangan berpangkat berikut.
   a. $2^5 \times 2^9 \times 2^{12}$
   b. $2^5 \times 3^6 \times 4^6$
   c. $\dfrac{2^5 \times 3^5 \times 4^2}{12^2}$
   d. $\dfrac{(-5)^6 \times 25^2}{125}$
   d. $\dfrac{3^7 \times 7^3 \times 2}{(42)^3}$

2. Dengan menggunakan sifat bilangan berpangkat, sederhanakanlah bentuk berikut.
   a. $2x^3 \times 7x^4 \times (3x)^2$
   b. $\left(\dfrac{-2p}{q} \right)^3 \times (-q)^4 \times \dfrac{2}{5}p^2$
   c. $y^5 \times (x \times z)^3 \left(\dfrac{1}{x^2 \times y} \right)$
   d. $(a \times b \times c)^4 \times \dfrac{3}{(b \times c)^3} \times \dfrac{b^3}{27a^5}$
   e. $\dfrac{-4a^3 \times 2b^5}{\left(\dfrac{8a}{b} \right)}$
   f. $\dfrac{1}{x^2 y} \times \dfrac{2x}{3y^2} \times \dfrac{5}{3x} \times (4y)^2$

g. $(-a \times b)^3 \times \left(\frac{-b}{2a}\right)^4 \times \left(\frac{3a}{b}\right)^5$

h. $\left(\frac{24a^3 \times b^8}{6a^5 \times b}\right) \times \left(\frac{4b^3 \times a}{2a^3}\right)^2$

i. $\left(\frac{36(x \times 2y)^2}{3x \times y^2}\right)^3 \div \left(\frac{12x(3y)^2}{9x^2 y}\right)^2$

j. $\left(\frac{(-p)^3 \times (-q)^2 \times r^3}{-3(p^2 q)^3}\right) \div \left(\frac{2pqr^3}{-12(qr)^2}\right)$

3. Hitunglah hasil operasi bilangan berpangkat berikut.

   a. $\left(-\frac{2}{3}\right)^4 \times \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right)^2$

   b. $(-5)^3 \times \left(\frac{1}{15}\right)^2 \times \left(\frac{10}{3}\right)^4 \times \left(\frac{9}{5}\right)^5$

   c. $\frac{3x^2 \times y^3}{24x} \times (2y)^2$; untuk $x = 2$ dan $y = 3$

   d. $\frac{\left(\frac{2}{3}x\right)^2 \times \left(\frac{3}{4}\right)(-y)^3}{xy^2}$; untuk $x = \frac{1}{2}$ dan $y = \frac{1}{3}$

   e. $\frac{3p^2 q \times (-3)^4}{(-2p)^2 \times (-3q)^3} \times 4\left(\frac{q}{p}\right)^2$; untuk $p = 4$ dan $q = 6$

4. Tentukan hasil dari $\frac{(2^{n+2})^2 - 2^2 \times 2^{2n}}{2^n \times 2^{n+2}}$

5. Misalkan kamu diminta menghitung 7^{64}. Berapa banyak perkalian yang kamu lakukan untuk mendapatkan nilai akhirnya? Bandingkan jawabanmu dengan temanmu. Pemenang di antara kalian adalah yang dapat mencari hasilnya dengan melakukan perkalian sesedikit mungkin. Coba tuliskan prosedur mengalikan yang paling sedikit perkaliannya untuk menghitung 7^{64}. Apakah prosedur tersebut dapat dipergunakan untuk pangkat positif berapapun?

6. Berdasarkan sifat angka 7, tentukan bilangan satuan dari $7^{1234} + 7^{2341} + 7^{3412} + 7^{4123}$ tanpa menghitung tuntas!

7. Tentukan bilangan satuan dari $\left((6)^{26}\right)^{62}$ berdasarkan sifat angka 6, tanpa menghitung tuntas. Selanjutnya berdasarkan sifat angka 2, 3, 4, 5, 8, 9, tentukan juga angka satuan yang diperoleh bilangan-bilangan tersebut yang dipangkatkan.

8. Tunjukkan bahwa $1^{2001} + 2^{2001} + 3^{2001} + \ldots + 2001^{2001}$ adalah kelipatan 13.

9. Bagaimana cara termudah untuk mencari $\frac{3^{2008}(10^{2013} + 5^{2012} . 2^{2011})}{5^{2012}(6^{2010} + 3^{2009} . 2^{2008})}$.

10. Hitunglah
$$\frac{1^{-4}+2^{-4}+3^{-4}+4^{-4}+\ldots}{1^{-4}+3^{-4}+5^{-4}+7^{-4}+\ldots}$$

11. Sederhanakanlah $\dfrac{a^{\frac{5}{3}}b^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{7}{6}}b^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{2}{3}}b}$.

12. Tentukan nilai x yang memenuhi
    a. $2^x = 8$
    b. $4^x = 0{,}125$
    c. $\left(\frac{2}{5}\right)^x = 1$

Projek

Bilangan yang terlalu besar atau terlalu kcil seringkali dituliskan dalam notasi eksponen yang dituliskan sebagai a E b yang nilainya adalah $a \times 10^b$. Sehingga 0,000052 ditulis sebagai 5,2 E 5. Cari besaran-besaran fisika, kimia, astronomi, dan ekonomi yang nilainya dinyatakan dengan notasi eksponen. Misalkan cepatan cahaya adalah 300.000 km/det, sehingga dalam notasi eksponen ditulis sebagai 3 E 8 m/det.

6. Bentuk Akar

Pengakaran (penarikan akar) suatu bilangan merupakan inversi dari pemangkatan suatu bilangan. Akar dilambangkan dengan notasi "$\sqrt{\ }$".

Perhatikan permasalahan berikut.

Masalah-1.4

Seorang ahli ekonomi menemukan bahwa harga (h) dan banyak barang (b) dapat dinyatakan dalam persamaan $h = 3\sqrt[3]{b^2}$. Jika nilai b = 8, maka berapa nilai h?

Alternatif Penyelesaian

$$h = 3\sqrt[3]{b^2} \Leftrightarrow h = 3\sqrt[3]{8^2}$$
$$\Leftrightarrow h = 3\sqrt[3]{64}$$
$$\Leftrightarrow h = 3\sqrt[3]{4\times4\times4}$$
$$\Leftrightarrow h = 12$$

Akar ke-n atau akar pangkat n dari suatu bilangan a dituliskan sebagai $\sqrt[n]{a}$, dengan a adalah bilangan pokok/basis dan n adalah indeks/eksponen akar.
Bentuk akar dan pangkat memiliki kaitan erat. Bentuk akar dapat diubah menjadi bentuk pangkat dan sebaliknya. Sebelum mempelajari bentuk akar, kamu harus memahami konsep bilangan rasional dan irrasional terlebih dahulu.

Bilangan rasional berbeda dengan bilangan irrasional. Bilangan rasional adalah bilangan yang dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{a}{b}$, dengan a dan b bilangan bulat dan $b \neq 0$. Bilangan rasional terdiri atas bilangan bulat, bilangan pecahan murni, dan bilangan pecahan desimal. Sedangkan, bilangan irrasional adalah bilangan yang tidak dapat dinyatakan dalam bentuk pecahan. Bilangan irrasional merupakan bilangan yang mengandung pecahan desimal tak berhingga dan tak berpola. Contoh bilangan irrasional, misalnya $\sqrt{2}$ = 1,414213562373..., e = 2,718..., π = 3,141592653… dan sebagainya.

Definisi 1.7

Misalkan a bilangan real dan n bilangan bulat positif. $\sqrt[n]{a}$ disebut bentuk akar jika dan hanya jika hasil $\sqrt[n]{a}$ adalah bilangan irrasional.

ilangan irrasional yang menggunakan tanda akar ($\sqrt{\ }$) dinamakan *bentuk akar*. Tetapi ingat, tidak semua bilangan yang berada dalam tanda akar merupakan bilangan irrasional. Contoh: $\sqrt{25}$ dan $\sqrt{64}$ bukan bentuk akar, karena nilai $\sqrt{25}$ adalah 5 dan nilai $\sqrt{64}$ adalah 8, keduanya bukan bilangan irrasional.
Agar lebih jelas, perhatikan contoh berikut.

1. $\sqrt{20}$ adalah bentuk akar
2. $\sqrt[3]{27}$ adalah bukan bentuk akar, karena $\sqrt[3]{27} = 3$

7. Hubungan Bentuk Akar dan Bilangan Berpangkat

Perlu diketahui bahwa bilangan berpangkat memiliki hubungan dengan bentuk akar. Berdasarkan Sifat-5, jika a adalah bilangan real dan $a \neq 0$ dengan $a > 0$, $\frac{p}{n}$ dan $\frac{m}{n}$ adalah bilangan pecahan $n \neq 0$, maka $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)\left(a^{\frac{p}{n}}\right) = (a)^{\frac{m+p}{n}}$.

Perhatikan bahwa $p^{\frac{1}{2}} \times p^{\frac{1}{2}} = p^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = p^{1} = p$ dan perhatikan bahwa

$\sqrt{p} \times \sqrt{p} = p$, sehingga berdasarkan Definisi 7.6 disimpulkan $p^{\frac{1}{2}} = \sqrt{p}$.

Perhatikan untuk kasus di bawah ini

$p^{\frac{1}{3}} \times p^{\frac{1}{3}} \times p^{\frac{1}{3}} = p^{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}} = p^1 = p$ dan perhatikan juga bahwa

$\sqrt[3]{p} \times \sqrt[3]{p} \times \sqrt[3]{p} = p$, sehingga berdasarkan Definisi 7.6 disimpulkan $p^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{p}$.

Latihan 1.3

Cermatilah dan buktikan apakah berlaku secara umum bahwa $p^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{p}$.

Perhatikan bahwa $p^{\frac{2}{3}} \times p^{\frac{2}{3}} \times p^{\frac{2}{3}} = p^2$, sehingga berdasarkan sifat perkalian bilangan berpangkat diperoleh:

$$\left(p^{\frac{2}{3}}\right)^3 = p^2 \qquad \text{Ingat, } \left(p^m\right)^n = p^{m \times n}$$

Jadi, $p^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{p^2}$.

Secara umum dapat disimpulkan bahwa $p^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{p^m} = \left(\sqrt[n]{p}\right)^m$ sebagaimana diberikan pada Definisi-6.

8. Operasi pada Bentuk Akar

a. Operasi Penjumlahan dan Pengurangan Bentuk Akar

Operasi penjumlahan dan pengurangan pada bentuk akar dapat dilakukan apabila bentuk akarnya senama. Bentuk akar senama adalah bentuk akar yang mempunyai eksponen dan basis sama. Untuk setiap p, q, dan r adalah bilangan real dan $r \geq 0$ berlaku sifat-sifat berikut.

$$p\sqrt[n]{r} + q\sqrt[n]{r} = (p+q)\sqrt[n]{r}$$

$$p\sqrt[n]{r} - q\sqrt[n]{r} = (p-q)\sqrt[n]{r}$$

Perhatikan contoh berikut ini!

Contoh 1.6

Tentukan hasil penjumlahan dan pengurangan berikut dalam bentuk yang sederhana!

1. $3\sqrt{5}+4\sqrt{5} = (3+4)\sqrt{5}$
   $= 7\sqrt{5}$
2. $\sqrt{5}+\sqrt{3}$ (tidak dapat disederhanakan karena akarnya tidak senama)
3. $2\sqrt[3]{4}-3\sqrt[3]{4} = (2-3)\sqrt[3]{4}$
   $= -\sqrt[3]{4}$
4. $3\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x} = (3-1)\sqrt[3]{x}$
   $= 2\sqrt[3]{x}$

b. Operasi Perkalian dan Pembagian Bentuk Akar

Pada pangkat pecahan telah dinyatakan bahwa $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$. Sifat perkalian dan pembagian bentuk akar dapat dicermati pada beberapa contoh berikut.

Contoh 1.7

1) $\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2^{\frac{3}{3}} = 2^1 = 2$
2) $\sqrt[6]{64} = \sqrt[6]{2^6} = 2^{\frac{6}{6}} = 2^1 = 2$
3) $4\sqrt[3]{5}\times 2\sqrt[3]{7} = (4\times 2)(\sqrt[3]{5\times 7}) = 8\sqrt[3]{35}$
4) $3\sqrt[5]{5}\times 5\sqrt[7]{5} = (3\times 5)(5^{\frac{1}{5}}\times 5^{\frac{1}{7}}) = 15(5^{\frac{12}{35}}) = 15\sqrt[35]{5^{12}}$
5) $\dfrac{3\sqrt[3]{4}}{4\sqrt[3]{5}} = \dfrac{3}{4}\sqrt[3]{\dfrac{4}{5}}$
6) $\dfrac{2\sqrt[4]{3}}{3\sqrt[4]{5}} = \dfrac{2}{3}\sqrt[4]{\dfrac{3}{5}}$

Latihan 1.4

1) Buktikan: jika a bilangan real dan $a > 0$, maka $\sqrt[n]{a^n} = a$
2) Buktikan: jika a, b, c, dan d bilangan real, $c > 0$ dan $d > 0$, maka $a\sqrt[n]{c} \times b\sqrt[n]{d} = ab\sqrt[n]{cd}$
3) Buktikan: jika a, b, c, dan d bilangan real, $c > 0$ dan $d > 0$, $d \neq 0$, maka $\frac{a\sqrt[n]{c}}{b\sqrt[n]{d}} = \frac{a}{b}\sqrt[n]{\frac{c}{d}}$

c. Merasionalkan Penyebut Bentuk Akar

Kita tahu bahwa bentuk-bentuk akar seperti $\sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt{3}+\sqrt{7}, \sqrt{2}-\sqrt{6}$, dst merupakan bilangan irrasional. Jika bentuk akar tersebut menjadi penyebut pada suatu pecahan, maka dikatakan sebagai penyebut irasional.

Penyebut irrasional dapat diubah menjadi bilangan rasional. Cara merasionalkan penyebut suatu pecahan bergantung pada bentuk pecahan itu sendiri. Akan tetapi, prinsip dasarnya sama, yaitu mengalikan dengan bentuk akar sekawannya. Proses ini dinamakan *merasionalkan penyebut*.

1) **Merasionalkan bentuk** $\frac{p}{\sqrt{q}}$

Bentuk $\frac{p}{\sqrt{q}}$ dirasionalkan dengan cara mengalikannya dengan $\frac{\sqrt{q}}{\sqrt{q}}$.

$$\frac{p}{\sqrt{q}} = \frac{p}{\sqrt{q}} \cdot \frac{\sqrt{q}}{\sqrt{q}} = \frac{p}{q}\sqrt{q}$$

Diskusi

Menurutmu mengapa penyebut bilangan pecahan berbentuk akar harus dirasionalkan?

Mengapa kita harus mengalikan $\frac{p}{\sqrt{q}}$ dengan $\frac{\sqrt{q}}{\sqrt{q}}$?

Karena nilai $\sqrt{q}$ selalu positif, maka $\frac{\sqrt{q}}{\sqrt{q}} = 1$. Jadi perkalian $\frac{p}{\sqrt{q}}$ dengan $\frac{\sqrt{q}}{\sqrt{q}}$ tidak akan mengubah nilai $\frac{p}{\sqrt{q}}$ namun menyebabkan penyebut menjadi bilangan rasional.

2) Merasionalkan bentuk $\frac{r}{p+\sqrt{q}}$, $\frac{r}{p-\sqrt{q}}$, $\frac{r}{\sqrt{p}+\sqrt{q}}$, dan $\frac{r}{\sqrt{p}-\sqrt{q}}$

Sebelum kita merasionalkan bentuk-bentuk akar di atas, perlu kita pahami bentuk-bentuk campuran bilangan rasional dan bilangan irrasional.

a) Jika bilangan rasional dijumlahkan dengan bilangan irrasional maka hasilnya bilangan irrasional. Contoh $2+\sqrt{7} = 2 + 2{,}645751.... = 4,645751...$ (bilangan irrasional).

b) Jika bilangan irrasional dijumlahkan dengan bilangan irrasional maka hasilnya bilangan irrasional atau rasional, Contoh (1) $\sqrt{5} + \sqrt{7} =$ 2,236068.... + 2,645575... = 4,881643... (bilangan irrasional), (2) $2\sqrt{5} + (-2\sqrt{5}) = 0$ (bilangan rasional). Jika dua bilangan irrasional dikurangkan, bagaimana hasilnya?

c) Jika bilangan rasional dikalikan dengan bilangan irrasional, maka hasilnya bilangan irrasional. Contoh $2 \times \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$.

d) Jika bilangan irrasional dikalikan dengan bilangan irrasional, maka hasilnya dapat bilangan rasional atau bilangan irrasional.

Contoh:

- $\sqrt{5} \times \sqrt{125} = \sqrt{5} \times 5\sqrt{5} = 25$ (25 adalah bilangan rasional)
- $\sqrt{3} \times \sqrt{5} = \sqrt{15}$ ($\sqrt{15}$ adalah bilangan irrasional)

e) $\sqrt[n]{a}$ disebut bentuk akar apabila hasil akar a adalah bilangan irrasional.

Untuk merasionalkan bentuk $\frac{r}{p+\sqrt{q}}$, $\frac{r}{p-\sqrt{q}}$, $\frac{r}{\sqrt{p}+\sqrt{q}}$, dan $\frac{r}{\sqrt{p}-\sqrt{q}}$.

dapat dilakukan dengan memperhatikan sifat perkalian $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.

Sehingga

$$\left(\sqrt{p}+\sqrt{q}\right)\left(\sqrt{p}-\sqrt{q}\right)=\left(\sqrt{p}\right)^2-\left(\sqrt{q}\right)^2=p-q$$

$$\left(p+\sqrt{q}\right)\left(p-\sqrt{q}\right)=p^2-\left(\sqrt{q}\right)^2=p^2-q$$

Bentuk $\left(p+\sqrt{q}\right)$ dan bentuk $\left(p-\sqrt{q}\right)$ saling sekawan, bentuk $\left(\sqrt{p}+\sqrt{q}\right)$ dan $\left(\sqrt{p}-\sqrt{q}\right)$ juga saling sekawan. Jika perkalian bentuk sekawan tersebut dilakukan maka dapat merasionalkan bentuk akar.

Contoh 1.8

Pikirkan cara termudah untuk menghitung jumlah bilangan-bilangan berikut

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}}\ldots+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}=\ldots?$$

Permasalahan di atas dapat diselesaikan dengan cara merasionalkan penyebut tiap suku; yaitu,

$$=\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{1}-\sqrt{2}}{\sqrt{1}-\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}\times\frac{\sqrt{3}-\sqrt{4}}{\sqrt{3}-\sqrt{4}}+$$

$$\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}}\times\frac{\sqrt{4}-\sqrt{5}}{\sqrt{4}-\sqrt{5}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}\times\frac{\sqrt{99}-\sqrt{100}}{\sqrt{99}-\sqrt{100}}$$

$$=\frac{\sqrt{1}-\sqrt{2}}{-1}+\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{-1}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{4}}{-1}+\frac{\sqrt{4}-\sqrt{5}}{-1}+\ldots+\frac{\sqrt{99}-\sqrt{100}}{-1}$$

$$=-\sqrt{1}+\sqrt{2}-\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{3}+\sqrt{4}-\sqrt{4}+\sqrt{5}-\ldots-\sqrt{99}+\sqrt{100}$$

$$=-\sqrt{1}+\sqrt{100}=-1+10=9.$$

Contoh 1.9

Berapakah nilai $\dfrac{1}{\sqrt{3+\dfrac{1}{3+\dfrac{1}{3+\ldots}}}}$

Perhatikan pola bilangan di ruas kanan. Misalkan,

$$P = \cfrac{1}{\sqrt{3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{3 + \ldots}}}}$$

Dengan menguadratkan ruas kiri dan kanan, diperoleh

$$P^2 = \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{3 + \ldots}}}$$

$$P^2 = \frac{1}{3 + P^2}$$

$$\Leftrightarrow \; P^2(3 + P^2) = 1$$

$$\Leftrightarrow \; (P^2)^2 + 3P^2 - 1 = 0$$

Dengan mengubah ke bentuk kuadrat sempurna, diperoleh persamaan:

$$\Leftrightarrow \; (P^2 + \frac{3}{2})^2 - \frac{13}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow \; \left(P^2 + \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2}\right)\left(P^2 + \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \; P^2 = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \; P = \sqrt{-\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2}} \text{ atau } P = \frac{1}{2}\sqrt{2\sqrt{13} - 6}$$

Ingat materi persamaan kuadrat di SMP. Dapatkah kamu selesaikan. $(P^2)^2 + 3P^2 - 1 = 0$ dengan rumus *abc* pada persamaan kuadrat?

$\left(P^2 + \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2}\right) = 0$ tidak memenuhi.

Dapatkah kamu beri alasannya?

Jadi, nilai dari $\cfrac{1}{\sqrt{3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{3 + \ldots}}}}$ adalah $\frac{1}{2}\sqrt{2\sqrt{13} - 6}$

Contoh 1.10

Rasionalkan penyebut pecahan-pecahan berikut.

a. $\frac{2}{3-\sqrt{2}} = \frac{2}{3-\sqrt{2}} \times \frac{3+\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}$ (kalikan penyebut dengan bentuk sekawannya)

$$= \frac{2(3+\sqrt{2})}{(3-\sqrt{2})(3+\sqrt{2})}$$

$$= \frac{2\left(3+\sqrt{2}\right)}{9-2}$$

$$= \frac{6+2\sqrt{2}}{7}$$

$$= \frac{6}{7} + \frac{2}{7}\sqrt{7}$$

b. $\frac{3}{6+\sqrt{3}} = \frac{3}{6+\sqrt{3}} \times \frac{6-\sqrt{3}}{6-\sqrt{3}}$ (kalikan penyebut dengan bentuk sekawannya)

$$= \frac{3(6-\sqrt{3})}{\left(6+\sqrt{3}\right)\left(6-\sqrt{3}\right)}$$

$$= \frac{18-3\sqrt{3}}{36-3}$$

$$= \frac{18-3\sqrt{3}}{33}$$

$$= \frac{6}{11} - \frac{\sqrt{3}}{11}$$

c. $\frac{4}{\sqrt{7}-\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{7}-\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$ (kalikan penyebut dengan bentuk sekawannya)

$$= \frac{4\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)}{\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)}$$

$$= \frac{4\sqrt{7}+4\sqrt{5}}{7-5}$$
$$= \frac{4\sqrt{7}+4\sqrt{5}}{2}$$
$$= 2\sqrt{7}+2\sqrt{5}$$

3) Menyederhanakan bentuk $\sqrt{(p+q)\pm 2\sqrt{pq}}$

Sekarang kita akan menyederhanakan bentuk akar yang mempunyai bentuk khusus; yaitu, bentuk $\sqrt{(p+q)\pm 2\sqrt{pq}}$. Perhatikan proses berikut ini! Diskusikanlah masalah berikut dengan temanmu!

a. $\left(\sqrt{p}+\sqrt{q}\right)\left(\sqrt{p}+\sqrt{q}\right)$

b. $\left(\sqrt{p}-\sqrt{q}\right)\left(\sqrt{p}-\sqrt{q}\right)$

Dari hasil kegiatan yang kamu lakukan, kamu akan memperoleh bentuk sederhananya menjadi $\sqrt{(p+q)\pm 2\sqrt{pq}}$. Selanjutnya, perhatikan contoh berikut!

Contoh 1.11

Sederhanakan bentuk akar berikut ini!

a. $\sqrt{8+2\sqrt{15}} = \sqrt{(5+3)+2\sqrt{5\times 3}} = \sqrt{5+2\sqrt{5\times 3}+3}$

$= \sqrt{\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{5}+\sqrt{3}$

b. $\sqrt{9-4\sqrt{5}} = \sqrt{5-4\sqrt{5}+4} = \sqrt{\left(\sqrt{5}-2\right)^2} = \sqrt{5}-2$

Uji Kompetensi 1.2

1. Rasionalkan penyebut pecahan-pecahan berikut ini!

   a. $\frac{5}{\sqrt{15}}$ d. $\frac{12}{\sqrt{24}}$

   b. $\frac{2}{\sqrt{20}}$ e. $\frac{15}{\sqrt{48}}$

   c. $\frac{3}{\sqrt{18}}$ f. $\frac{2a}{3\sqrt{a}}$

2. Rasionalkan penyebut pecahan-pecahan berikut ini!

   a. $\frac{1}{5-\sqrt{3}}$ d. $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{10}}$

   b. $\frac{4-\sqrt{2}}{4+\sqrt{2}}$ e. $\frac{xy}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$

   c. $\frac{2a}{3a+\sqrt{5}}$

   f. $\frac{\sqrt{24}+\sqrt{54}-\sqrt{150}}{\sqrt{96}}$

3. Sederhanakanlah bentuk berikut ini!

   a. $\frac{15}{\sqrt{75}}-\frac{1}{2-\sqrt{3}}$

   b. $\frac{7}{2+\sqrt{8}}+\frac{11}{2-\sqrt{8}}$

   c. $\frac{4}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}-\frac{3}{\sqrt{2}-1}+\frac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

   d. $\frac{10}{\sqrt{5}+\sqrt{6}}+\frac{12}{\sqrt{6}+\sqrt{7}}+\frac{14}{\sqrt{7}+\sqrt{8}}$

4. Jika $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}=a+b\sqrt{6}$, tentukan nilai $a+b$!

5. Sederhanakan bentuk akar berikut ini!

   a. $\sqrt{19+8\sqrt{3}}$ d. $\sqrt{21-4\sqrt{5}}$

   b. $\sqrt{5+2\sqrt{6}}$ e. $\sqrt{21+8\sqrt{5}}$

   c. $\sqrt{43+12\sqrt{7}}$

SOAL TANTANGAN

1. Tentukanlah nilai dari:

   a. $\sqrt[3]{2\sqrt{3\sqrt[3]{2\sqrt{3\sqrt[3]{2\sqrt{3\sqrt[3]{\ldots}}}}}}}$

   b. $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\ldots}}}}}}$

   c. $1+\cfrac{1}{\sqrt{1+\cfrac{1}{\sqrt{1+\cfrac{1}{\sqrt{\ldots}}}}}}$

2. Jika a,b adalah bilangan asli dan $a \leq b$ sehingga $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{a}}{\sqrt{4}+\sqrt{b}}$ adalah bilangan rasional, maka pasangan (a,b) adalah ... (OSN 2005/2006)

3. Nyatakan b dalam a dan c pada $\dfrac{\sqrt[3]{b\sqrt{c}}}{\sqrt{c\sqrt[3]{a}}} = abc.$

4. Bentuk $\sqrt[4]{49-20\sqrt{6}}$ dapat disederhanakan menjadi ....

5. $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\dfrac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{1.000.000}+\sqrt{1.000.001}}=\sqrt{a}-\sqrt{b}$

6. $\sqrt{54+14\sqrt{5}}+\sqrt{12-2\sqrt{35}}+\sqrt{32-10\sqrt{7}}=$

7. Jika $(3+4)(3^2+4^2)(3^4+4^4)(3^8+4^8)(3^{16}+4^{16})(3^{32}+4^{32}) = (4^x-3^y)$, maka $x-y = \ldots$

Projek

Tidak semua bilangan pecahan desimal tak hingga adalah bilangan irrasional. Sebagai contoh 0,333... bukanlah bilangan irrasional, karena dapat dinyatakan sebagai pecahan murni $\dfrac{1}{3}$. Kenyataannya, bilangan pecahan desimal tak hingga dengan desimal berulang seperti 0,333... dapat dinyatakan dalam bentuk pecahan.

a. Rancang sebuah prosedur untuk mengkonversi bilangan pecahan desimal tak hingga dengan desimal berulang menjadi bilangan pecahan. Beri contoh penerapan prosedur yang kamu rancang.

b. Berdasarkan penjelasan di atas π yang bilangan irrasional tidak mungkin sama dengan $\dfrac{22}{7}$, karena $\dfrac{22}{7}$ adalah pendekatan untuk nilai π sebenarnya.

   1) Berapakah kesalahan $\dfrac{22}{7}$ terhadap nilai π?

   2) Dengan menggunakan prosedur yang kamu rancang di atas cari pecahan yang lebih mendekati nilai π daripada $\dfrac{22}{7}$ (kesalahannya lebih kecil).

   3) Apakah lebih baik menggunakan angka yang kamu peroleh daripada menggunakan $\dfrac{22}{7}$

Buat laporan projek ini dan paparkan di depan kelas.

9. Menemukan Konsep Logaritma

Telinga manusia dapat mendengar suara dengan intensitas yang rentangnya luar biasa. Suara paling keras yang dapat didengar oleh orang yang sehat tanpa merusak gendang telinga memiliki intensitas 1 triliun (1.000.000.000.000) kali lebih kuat dari pada suara paling rendah yang bisa didengar.

Menghitung intensitas bunyi dengan rentang begitu besar tentu sangat tidak nyaman. Namun, dengan logaritma perhitungan ini akan menjadi lebih sederhana. Logaritma merupakan suatu operasi hitung. Alexander Graham Bell (1847–1922) menggunakan logaritma untuk menghitung skala bunyi. Skala ini dinamakan *decibel*, dan didefinisikan sebagai $D = 10\log\frac{I}{I_0}$, dengan D adalah skala *decibel* bunyi, I adalah intensitas bunyi dengan satuan Watt per meter persegi $\left({}^{W}/_{m^2}\right)$, dan I_0 adalah intensitas bunyi paling minimum yang bisa didengar orang yang sehat, yaitu $1{,}0 \times 10^{-12}$. Sebagai gambaran, berikut ini adalah tabel intensitas bunyi beberapa objek.

Tabel 1.1 Intensitas bunyi beberapa suara

Intensitas Bunyi $\left({}^{W}/_{m^2}\right)$	Intensitas Bunyi
$1{,}0 \times 10^{-12}$	Ambang batas bawah pendengaran
$5{,}2 \times 10^{-10}$	Suara bisik-bisik
$3{,}2 \times 10^{-6}$	Percakapan normal
$8{,}5 \times 10^{-4}$	Lalu lintas padat
$8{,}3 \times 10^{2}$	Pesawat jet lepas landas

Banyak masalah kehidupan yang penyelesaiannya melibatkan berbagai aturan dan sifat logaritma. Cermatilah masalah berikut.

Masalah-1.5

Yusuf adalah seorang pelajar kelas X di kota Kupang. Ia senang berhemat dan menabung uang. Selama ini dia berhasil menabung uangnya sejumlah Rp 1.000.000,00 di dalam sebuah celengan yang terbuat dari tanah liat. Agar uangnya lebih aman, ia menabung uangnya di sebuah bank dengan bunga 10% per tahun. Berapa lama Yusuf menyimpan uang tersebut agar menjadi Rp 1.464.100,-

Pahami masalah dan tuliskan informasi yang diketahui pada soal. Buat tabel keterkaitan antara jumlah uang Yusuf dengan waktu penyimpanan. Selanjutnya temukan model matematika yang menyatakan hubungan total uang simpanan dengan waktu menyimpan dan bunga uang.

Diketahui:
Modal awal (M_0) = 1.000.000,- dan besar uang tabungan setelah sekian tahun (M_t) = 1.464.100, besar bunga yang disediakan bank untuk satu tahun adalah 10% = 0,1.

Ditanya:
Berapa tahun (t) Yusuf menabung agar uangnya menjadi (M_t) = 1.464.100.-

Alternatif Penyelesaian

Perhatikan pola pertambahan jumlah uang Yusuf setiap akhir tahun pada tabel sebagai berikut.

Tabel 1.2 Perhitungan besar suku bunga pada setiap akhir tahun *t*

Akhir Tahun	Bunga uang (10% × Total Uang)	Total = Modal + Bunga	Pola Total Uang pada saat *t*
0	0	Rp. 1.000.000	$1.000.000\ (1+0,1)^0$
1	Rp. 100.000	Rp. 1.100.000	$1.000.000\ (1+0,1)^1$
2	Rp. 110.000	Rp. 1.210.000	$1.000.000\ (1+0,1)^2$
3	Rp. 121.000	Rp. 1.331.000	$1.000.000\ (1+0,1)^3$
4	Rp. 133.100	Rp. 1.464.100	$1.000.000\ (1+0,1)^4$

Dari tabel di atas, jelas kita lihat bahwa Yusuf harus menabung selama 4 tahun agar uangnya menjadi Rp 1.464.100,-. Selanjutnya, kita akan menyelesaikan permasalahan di atas dengan menggunakan logaritma, setelah kita mengenal sifat-sifat logaritma.

Dalam pembahasan sebelumnya, kita telah membahas tentang pemangkatan suatu bilangan. Kita tahu bahwa 2^3 hasilnya adalah 8 yang dapat ditulis $2^3 = 8$. Sehingga bila ada persamaan $2^x = 8$, maka nilai x yang memenuhi persamaan tersebut adalah $x = 3$.

Perhatikan Tabel-1.2 di atas, kita peroleh $1.464.100 = 1.000.000\ (1+0,1)^4$. Jika $4 = t$, maka persamaan tersebut menjadi $1.464.100 = 1.000.000\ (1 + 0,1)^t$. Hal ini dapat dikaitkan dengan bentuk eksponen yang sudah dipelajari sebelumnya, yaitu $a^c = b$, dengan memisalkan $a = (1 + 0,1)$, $b = 1,464100$, dan $c = t$. Bagaimana cara menentukan nilai $c = t = 4$?

Permasalahan ini dapat diselesaikan menggunakan invers dari eksponen, yaitu logaritma. Logaritma, dituliskan sebagai "log", didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 1.8

Misalkan $a, b, c \in R$, $a > 0$, $a \neq 1$, dan $b > 0$ maka ${}^{a}\log b = c$ jika dan hanya jika $a^c = b$.

dimana: a disebut basis ($0 < a < 1$ atau $a > 1$)
b disebut numerus ($b > 0$)
c disebut hasil logaritma

Diskusi

Mengapa ada syarat $a > 0$ dan $a \neq 1$ dalam definisi di atas? Diskusikan dengan temanmu atau guru. Demikian juga dengan $b > 0$.

Berdasarkan definisi di atas, kita dapatkan bentuk-bentuk berikut.

- $2^x = 5 \Leftrightarrow x = {}^{2}\log 5$ (notasi $\Leftrightarrow$ dibaca jika dan hanya jika)
- $3^y = 8 \Leftrightarrow y = {}^{3}\log 8$
- $5^z = 3 \Leftrightarrow z = {}^{5}\log 3$

Catatan:

- Jika logaritma dengan basis e (yaitu $e \approx 2{,}718\ldots$, e adalah bilangan *Euler*), maka ${}^{e}\log b$ ditulis $\ln b$.
- Bilangan pokok (basis) 10 tidak ditulis, sehingga ${}^{10}\log a = \log a$.

Masalah-1.6

Di tahun 2013 jumlah penduduk Negara X adalah 100 juta orang. Bila pertambahan penduduk 1% per tahun, berapa jumlah penduduk negara itu pada akhir tahun 2017 dan tahun 2038? Pada tahun berapa penduduk negara itu menjadi dua kali lipat?

Diketahui:
Jumlah penduduk Negara X pada tahun 2013 adalah 100 juta jiwa.
Persentase pertambahan penduduk per tahun adalah 1%

Ditanya:

a) Jumlah penduduk pada tahun 2017 dan tahun 2038
b) Pada tahun berapa, jumlah penduduk menjadi dua kali lipat.

Penyelesaian

Jumlah penduduk di awal (P_0) = 100 juta

Misalkan: P_t adalah jumlah penduduk pada tahun t

r adalah persentase pertambahan penduduk.

Tabel 1.3 Perhitungan jumlah penduduk Negara X untuk setiap tahun

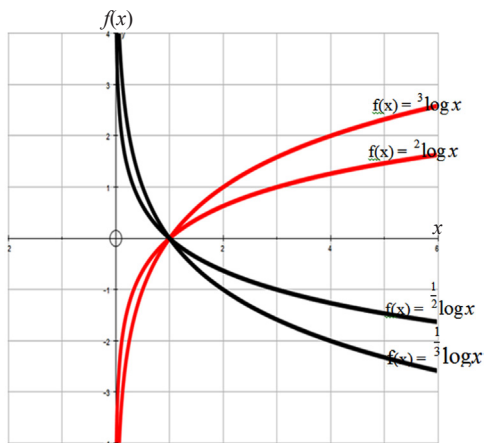
Akhir Tahun	Pertambahan penduduk (1% × total penduduk)	Total = Jumlah Penduduk awal + Pertambahan (juta)	Pola Total Penduduk pada saat t
2013	0	100	$100\ (1+0{,}01)^0$
2014	1	101	$100\ (1+0{,}01)^1$
2015	1,01	102,01	$100\ (1+0{,}01)^2$
2016	1,0201	103,0301	$100\ (1+0{,}01)^3$
2017	1,030301	104,060401	$100\ (1+0{,}01)^4$

Dari tabel di atas, jelas kita lihat bahwa total penduduk pada akhir tahun 2017 adalah 104.060.401. Selanjutnya, kita akan menyelesaikan permasalahan di atas dengan menggunakan logaritma, setelah kita mengenal sifat-sifat logaritma.

Perhatikan Tabel-1.3 di atas, kita peroleh $104.060.401 = 100\ (1+0{,}01)^4$. Jika $4 = t$, maka persamaan tersebut menjadi $104.060.401 = 100\ (1+0{,}01)^t$. Hal ini dapat dikaitkan dengan bentuk eksponen yang sudah dipelajari sebelumnya, yaitu $a^c = b$, dengan memisalkan $a = (1 + 0{,}01)$, $b = 104.060.401$, dan $c = t$. Bagaimana cara menentukan nilai $c = t = 4$? Selanjutnya bagaimana menentukan jumlah penduduk pada akhir tahun 2038 dan tahun berapa jumlah penduduk Negara X menjadi duakali lipat.

Diskusi

- Misalkan P_0 adalah jumlah penduduk pada saat $t = 0$, dan P_t adalah jumlah penduduk pada akhir tahun t, dan diketahui nilai $e \approx 2{,}718....$ Berdiskusilah dengan teman dan guru, bagaimana menemukan hubungan P_t dengan P_0 sehingga $P_t = P_0\ (e^{rt})$.
- Apakah kamu mengerti maknanya? Jika tidak, bertanya pada guru. Misalnya ketika $t = 0$, maka $P_0 = 100$ juta. Artinya jumlah penduduk mula-mula adalah 100 juta orang.

Selanjutnya cermati grafik fungsi $y = f(x) = {}^{2}\log x$, $f(x) = -{}^{2}\log x$, $f(x) = {}^{3}\log x$ dan $f(x) = -{}^{3}\log x$ yang disajikan berikut.

Gambar 1.2 Grafik Fungsi Logaritma

Berdasarkan grafik di atas dan definisi tentang logaritma, diskusikan dengan temanmu untuk mencari sedikitnya 5 sifat dari fungsi logaritma. Sajikan hasil yang kamu peroleh di depan kelas.

Perhatikan grafik fungsi di atas. Isilah tabel berikut.

Tabel 1.4 Perhitungan Nilai Fungsi Logaritma

	x								
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	1	2	3	4	8	9
$f(x) = {}^{2}\log x$				0					
$f(x) = {}^{\frac{1}{2}}\log x$				0					
$f(x) = {}^{3}\log x$				0					
$f(x) = {}^{\frac{1}{3}}\log x$				0					

Mari kita definisikan fungsi logaritma.

Definisi 1.9

Fungsi Logaritma adalah suatu fungsi yang didefinisikan oleh $y = f(x) = {}^{a}\log x$ dengan a bilangan real, $a > 0$, $a \neq 1$ serta $x > 0$.
x adalah variabel (peubah bebas) dan a adalah bilangan pokok atau *basis*.

Contoh 1.12

1. Tulislah bentuk logaritma dari:
   a. $2^5 = 32$ maka ${}^{2}\log 32 = 5$
   b. $4^3 = 64$ maka ${}^{4}\log 64 = 3$
   c. $2^{-2} = \frac{1}{4}$ maka ${}^{2}\log \frac{1}{4} = -2$
2. Tulislah bentuk pangkat dari:
   a. ${}^{11}\log 121 = 2$ maka $11^2 = 121$
   b. ${}^{3}\log 81 = 4$ maka $3^4 = 81$
   c. $\log 1000 = 3$ maka $10^3 = 1000$
3. Hitunglah nilai logaritma berikut.
   a. ${}^{2}\log 2 = 1$ karena $2^1 = 2$
   b. ${}^{2}\log 1 = 0$ karena $2^0 = 1$
   c. ${}^{2}\log 128 = 7$ karena $2^7 = 128$

10. Sifat-sifat Logaritma

Dari Definisi 1.9, logaritma merupakan inversi dari perpangkatan, oleh karena itu terdapat 3 sifat dasar logaritma, yaitu:

Sifat-6. Sifat Dasar Logaritma

Misalkan a dan n bilangan real, $a > 0$ dan $a \neq 1$, maka
1. ${}^{a}\log a = 0$
2. ${}^{a}\log 1 = 0$
3. ${}^{a}\log a^n = n$

Sifat-sifat tersebut dapat diturunkan langsung dari definisi logaritma.

Contoh 1.13

1. ${}^a\log a = x \Leftrightarrow a^x = a$ sehingga $x = 1$ atau ${}^a\log a = 1$
2. ${}^a\log 1 = y \Leftrightarrow a^y = 1$. Karena $a^0 = 1$, maka $y = 0$
3. ${}^a\log a^n = z \Leftrightarrow a^x = a^n$ sehingga $z = n$ serta ${}^a\log a^n = n$

BEBERAPA SIFAT OPERASI LOGARITMA

Sifat-7

Untuk a, b, dan c bilangan real positif, $a \neq 1$, dan $b > 0$, berlaku ${}^a\log(b \times c) = {}^a\log b + {}^a\log c$

Bukti:

Berdasarkan Definisi 1.6 maka diperoleh:

${}^a\log b = x \Leftrightarrow b = a^x$

${}^a\log c = y \Leftrightarrow c = a^y$

- Simbol $\Leftrightarrow$ dibaca jika dan hanya jika
- Apakah kamu mengerti maknanya? Jika tidak bertanya kepada guru.

Dengan mengalikan nilai b dengan c, maka:

$b \times c = a^x \times a^y \Leftrightarrow b \times c = a^{x+y}$

$\Leftrightarrow {}^a\log(b \times c) = x + y$ Substitusi nilai x dan y

$\Leftrightarrow {}^a\log(b \times c) = {}^a\log b + {}^a\log c$ (terbukti)

Sifat-8

Untuk a, b, dan c bilangan real dengan $a > 0$, $a \neq 1$, dan $b > 0$, berlaku

${}^a\log\left(\frac{b}{c}\right) = {}^a\log b - {}^a\log c$

Bukti:

Berdasarkan Definisi 1.6, diperoleh:

${}^a\log b = x \Leftrightarrow b = a^x$

${}^a\log c = y \Leftrightarrow c = a^y$

Dengan membagikan nilai b dengan c, maka diperoleh

$\frac{b}{c} = \frac{a^x}{a^y} \Leftrightarrow \frac{b}{c} = a^{x-y}$

$\Leftrightarrow {}^a\log\left(\frac{b}{c}\right) = {}^a\log a^{x-y}$

$$\Leftrightarrow \; {}^{a}\log\left(\frac{b}{c}\right) = x - y \qquad \text{Substitusi nilai } x \text{ dan } y$$

$$\Leftrightarrow \; {}^{a}\log\left(\frac{b}{c}\right) = {}^{a}\log b - {}^{a}\log c \quad \text{(terbukti)}$$

Sifat-9

Untuk a, b, dan n bilangan real, $a > 0$, $b > 0$, $a \neq 1$, berlaku
${}^{a}\log b^{n} = n\,{}^{a}\log b$

Bukti:

$${}^{a}\log b^{n} = {}^{a}\log\left(\underbrace{b \times b \times b \times \ldots \times b}_{n \text{ faktor}}\right) \qquad \text{ingat, } a^{m} = \underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{m \text{ faktor}}$$

$$\Leftrightarrow \; {}^{a}\log b^{n} = \underbrace{{}^{a}\log b + {}^{a}\log b + \ldots + {}^{a}\log b}_{n \text{ faktor}} \qquad \text{ingat, Sifat-8}$$

$$\Leftrightarrow \; {}^{a}\log b^{n} = n\,{}^{a}\log b \quad \text{(terbukti)}$$

Sifat-10

Untuk a, b, dan c bilangan real positif, $a \neq 1$, $b \neq 1$, dan $c \neq 1$, berlaku

$${}^{a}\log b = \frac{{}^{c}\log b}{{}^{c}\log a} = \frac{1}{{}^{b}\log a}$$

Bukti:

Berdasarkan Definisi 1.8, diperoleh:
${}^{a}\log b = x \Leftrightarrow b = a^{x}$

Terdapat bilangan pokok c sedemikian sehingga:

$${}^{c}\log b = {}^{c}\log a^{x} \;\Leftrightarrow\; {}^{c}\log b = x\,{}^{c}\log a \qquad \text{ingat, Sifat-9}$$

$$\Leftrightarrow \; x = \frac{{}^{c}\log b}{{}^{c}\log a} \qquad \text{substitusi nilai } x$$

$$\Leftrightarrow \; {}^{a}\log b = \frac{{}^{c}\log b}{{}^{c}\log a} \quad \text{(terbukti)}$$

Karena c adalah bilangan sembarang dengan ketentuan di atas dapat dipenuhi $c = b$ sehingga diperoleh

$$\Leftrightarrow \quad {}^{a}\log b = \frac{{}^{b}\log b}{{}^{b}\log a} \qquad \text{ingat, Sifat pokok 2}$$

$$\Leftrightarrow \quad = \frac{1}{{}^{b}\log a} \quad \text{(terbukti)}$$

Sifat-11

Untuk a, b, dan c bilangan real positif dengan $a \neq 1$ dan $c \neq 1$, berlaku
${}^{a}\log b \times {}^{b}\log c = {}^{a}\log c$

Bukti:
Berdasarkan Definisi 1.6 maka diperoleh:

${}^{a}\log b = x \Leftrightarrow b = a^{x}$

${}^{b}\log c = y \Leftrightarrow c = b^{y}$

${}^{a}\log b \times {}^{b}\log c = {}^{a}\log ax \times {}^{b}\log by$

$\Leftrightarrow$ ${}^{a}\log b \times {}^{b}\log c = {}^{a}\log b \times {}^{b}\log b^{y}$ ingat, $c = b^{y}$

$\Leftrightarrow$ ${}^{a}\log b \times {}^{b}\log c = y\, {}^{a}\log b \times {}^{b}\log b$ ingat, Sifat pokok 2

$\Leftrightarrow$ ${}^{a}\log b \times {}^{b}\log c = y\, {}^{a}\log b$ ingat, Sifat 6

$\Leftrightarrow$ ${}^{a}\log b \times {}^{b}\log c = {}^{a}\log b^{y}$ ingat, $c = b^{y}$

$\Leftrightarrow$ ${}^{a}\log b \times {}^{b}\log c = {}^{a}\log c$ (terbukti)

Sifat-12

Untuk a dan b bilangan real positif dengan $a \neq 1$, berlaku

${}^{a^{m}}\log b^{n} = \frac{n}{m}({}^{a}\log b)$, dengan m, n bilangan bulat dan $m \neq 0$.

Bukti: (Silahkan coba sendiri)

Sifat-13

Untuk a dan b bilangan real positif $a \neq 1$, berlaku $a^{{}^{a}\log b} = b$

Bukti: (coba sendiri)
Logaritma saling *invers* dengan eksponen. Misalkan ${}^{a}\log b = c$. Kita subtitusikan ${}^{a}\log b = c$ ke $a^{c} = (a)^{{}^{a}\log b}$, sehingga diperoleh $a^{c} = b$

Untuk mendalami sifat-sifat di atas, perhatikan beberapa contoh berikut.

Contoh 1.14

Mari kita tinjau kembali Masalah-1.5. Kita akan menyelesaikan masalah tersebut dengan menggunakan konsep logaritma. Cermatilah kembali Tabel 1.2. Kita dapat menyatakan hubungan total jumlah uang untuk t tahun sebagai berikut:

$M_t = M_0 (1+i)^t$

dimana M_t : total jumlah uang diakhir tahun t

t : periode waktu

i : bunga uang

Dengan menggunakan notasi di atas, maka soal tersebut dapat dituliskan sebagai berikut:

Diketahui : $M_0 = 1.000.000$, $M_t = 1.464.100$, $i = 0{,}1$

Ditanya : t

Penyelesaian

$1.464.100 = 1.000.000\ (1+0{,}1)^t$

$\Leftrightarrow \log 1.464.100 = \log [1.000.000\ (1{,}1)^t]$

$\Leftrightarrow \log 1.464.100 = \log 1.000.000 + \log (1{,}1)^t$

$\Leftrightarrow \log 1.464.100 - \log 1.000.000 = t \log 1{,}1$

$$\Leftrightarrow \log \frac{1.464.100}{1.000.000} = t \log 1{,}1$$

$$\Leftrightarrow \log \frac{14.641}{10.000} = t \log 1{,}1$$

$$\Leftrightarrow \log \left(\frac{11}{10}\right)^4 = t \log 1{,}1$$

$\Leftrightarrow 4 \log (1{,}1) = t \log 1{,}1$

$\Rightarrow t = 4$

Jadi, Yusuf harus menabung selama 4 tahun agar mendapatkan uang sebesar Rp 1.464.100,-

Contoh 1.15

Misal $\log^2 a$ adalah notasi untuk $(\log a)^2$. Berapakah nilai a yang memenuhi $\log^2 a + \log a = 6$?

Penyelesaian

Misal $P = \log a$

$\log^2 a + \log a = 6 \Leftrightarrow (\log a)^2 + (\log a) = 6$
$\Leftrightarrow P^2 + P - 6 = 0$
$\Leftrightarrow (P + 3)(P - 2) = 0$
$\Leftrightarrow P = -3$ atau $P = 2$
$\Leftrightarrow \log a = -3$ atau $\log a = 2$
$\Leftrightarrow a = 10^{-3}$ atau $a = 10^2$

Jadi, nilai a yang memenuhi persamaan di atas adalah $a = 0{,}001$ atau $a = 100$.

Contoh 1.16

Nyatakan b dalam a supaya berlaku ${}^a\log b - 2\,{}^b\log a = 1$!

Penyelesaian

Ingat, ${}^b\log a = \dfrac{1}{{}^a\log b}$

Misalkan: $P = {}^a\log b$

${}^a\log b - 2\,{}^b\log a = 1$

$\Leftrightarrow {}^a\log b - \dfrac{2}{{}^a\log b} - 1 = 0$

$\Leftrightarrow P - \dfrac{2}{P} - 1 = 0$

$\Leftrightarrow P^2 - P - 2 = 0$

$\Leftrightarrow (P + 1)(P - 2) = 0$

$\Leftrightarrow P = -1$ atau $P = 2$

$\Leftrightarrow {}^a\log b = -1$ atau ${}^a\log b = 2$

Sekarang akan kita nyatakan b dalam a, yaitu,

${}^a\log b = -1 \Leftrightarrow a^{{}^a\log b} = a^{-1}$ atau ${}^a\log b = 2 \Leftrightarrow a^{{}^a\log b} = a^2$

$\Leftrightarrow b = a^{-1}$ $\qquad$ $\Leftrightarrow b = a^{-2}$

$\Leftrightarrow b = \dfrac{1}{a}$

Jadi, $b = \dfrac{1}{a}$ atau $b = a^{-2}$.

Uji Kompetensi 1.3

1. Pada awal tahun, Rony menabung uang di bank sebesar Rp 125.000,00. Ia menyimpan uang tersebut selama 8 tahun. Berapa jumlah uang Rony pada akhir tahun ke delapan jika bank memberi suku bunga majemuk 6% setahun?
2. Pak Thomas menabung Rp 2.000.000,00 selama 5 tahun dengan bunga 12% per tahun. Jika perhitungan bunga tiga bulanan, berapakah besar bunga yang diterima Pak Thomas?
3. Tentukan skala decibel suara berikut.
   a. Percakapan normal yang memiliki intensitas $3{,}2 \times 10^{-6}$ Watt per meter kuadrat.
   b. Pesawat jet yang baru lepas landas yang memiliki intensitas $8{,}3 \times 10^{2}$ Watt per meter kuadrat.
4. Gemuruh suara Air terjun Niagara memiliki skala decibel 90. Tentukan intensitas bunyi dari air terjun tersebut. Apakah intensitas tersebut masih aman untuk telinga manusia?
5. Tulislah bentuk logaritma dari:
   a. $5^3 = 125$
   b. $10^2 = 100$
   c. $4^3 = 64$
   d. $6^1 = 6$
6. Tulislah bentuk pangkat dari:
   a. $\log 0{,}01 = -2$
   b. ${}^{0,5}\log 0{,}0625 = 4$
   c. ${}^{2}\log \sqrt[3]{2} = \frac{1}{3}$
   d. ${}^{3}\log \frac{1}{9} = -2$
7. Hitunglah nilai dari:
   a. $\log 10^4$
   b. ${}^5\log 125$
   c. ${}^3\log \frac{1}{27}$
   d. ${}^2\log 0{,}25$
   e. ${}^4\log 4^{10}$
   f. ${}^5\log 1$
8. Diketahui log 2 = 0,3010; log 3 = 0,4771 dan log 7 = 0,8451 tentukan:
   a. log 18
   b. log 21
   c. log 10,5
   d. $\log \frac{1}{7}$
9. Sederhanakan
   a. $\frac{2}{3} \times {}^2\log 64 - \frac{1}{2} \times {}^2\log 16$
   b. ${}^a\log 2x + 3\left({}^a\log x - {}^a\log y\right)$
   c. ${}^a\log \frac{a}{\sqrt{x}} - {}^a\log \sqrt{ax}$
   d. $\log \sqrt{a} + \log \sqrt{b} - \frac{1}{2} \log ab$

10. Jika $^{2}\log 3 = a$ dan $^{3}\log 5 = b$, nyatakan bentuk berikut dalam a dan b!
    a. $^{2}\log 15$
    b. $^{4}\log 75$
    c. $^{25}\log 36$
    d. $^{2}\log 5$
    e. $^{30}\log 150$
    f. $^{100}\log 50$

11. Jika $b = a^4$, a dan b bilangan real positif, tentukan nilai $^{a}\log b - {}^{b}\log a$!

12. Jika $^{a}\log b = 4$, $^{c}\log b = 4$ dan a, b, c bilangan positif, $a, c \neq 1$, tentukan nilai $\left[{}^{a}\log(bc)^{4}\right]^{\frac{1}{2}}$!

13. Buktikan log 1 = 0 dan log 10=1!

14. Buktikan bahwa untuk $a > b > 0$, $^{a}\log b < 0$ dan sebaliknya untuk $0 < a < b$, $^{a}\log b > 0$!

15. $\log^2 a$ adalah notasi untuk $(\log a)^2$. Berapakah nilai a yang memenuhi $2 \times \log^2 a + \log a = 6$?

16. Nyatakan p dalam q supaya berlaku $^{p}\log q - 6\ {}^{q}\log p = 1$!

17. $^{2}\log^{2} a$ adalah notasi untuk $(^{2}\log a)^2$. Jika a adalah bilangan bulat positif, maka berapakah nilai a yang memenuhi $^{2}\log^{2}(a^2 - 6a) + {}^{2}\log(a^2 - 6a)^2 = 8$.

18. Untuk $a > 0$, $a \neq 1$, nyatakan b dalam a yang memenuhi persamaan $^{a}\log^{2}(b^{a} + a) - {}^{a}\log(b^{a} + a)^{3} + 2 = 0$

SOAL TANTANGAN

19. Jika $^{4}\log a = p$ dan $^{8}\log b = q$ maka tentukanlah

$$\sqrt{a^5 \sqrt[3]{b \sqrt{a^5 \sqrt[3]{b \sqrt{a^5 \sqrt[3]{b \sqrt{\ldots}}}}}}}$$

dalam p dan q.

Projek

Skala logaritma dipergunakan untuk banyak keperluan selain menyatakan intensitas bunyi. Cari informasi tentang besaran lain yang menggunakan skala logaritma. Untuk membedakan analisis menggunakan logaritma bahkan digambarkan grafik dalam skala logaritma. Cari informasi ada berapa macam skala logaritma biasa dipergunakan dan beri contoh penelitian agar skala logaritma tersebut dipergunakan. Buat laporan hasil pengamatan dan sajikan di depan kelas.

D. PENUTUP

Berdasarkan sajian materi terkait berbagai konsep dan sifat eksponen dan logaritma di atas, beberapa hal penting dapat kita rangkum sebagai berikut.

1. Konsep eksponen dan logaritma dapat ditemukan kembali dari berbagai pemecahan masalah nyata di sekitar kehidupan kita.
2. Operasi eksponen adalah perluasan dari operasi perpangkatan yang sudah dipelajari di Sekolah Dasar dan SMP. Operasi perpangkatan pasti merupakan eksponen, tetapi operasi eksponen belum tentu perpangkatan. Perbedaannya terletak pada semesta pembicaraannya. Semesta pembicaraaan pada operasi perpangkatan adalah bilangan, tetapi semesta pembicaraan pada eksponen tergantung variabel sebagai eksponen dari basisnya. Misalnya $p^x = q$, x sebagai eksponen dari p, dimana x dan p belum tentu bilangan, tetapi $2^3 = 8$, 3 adalah sebuah bilangan pangkat dari 2.
3. Perpangkatan dan penarikan akar adalah dua operasi yang saling berkebalikan. Artinya jika suatu bilangan dipangkatkan dan hasilnya diakarkan dengan pangkat akar yang sama dengan pangkat bilangan sebelumnya, maka hasilnya adalah bilangan semula. Misalnya $2^3 = 8$ maka $\sqrt[3]{8} = 2$
4. Sifat-sifat perpangkatan dapat digunakan untuk menurunkan sifat-sifat penarikan akar.
5. Eksponen dan logaritma adalah dua operasi yang saling berbalikan. Artinya jika suatu basis a dieksponenkan dengan c dan hasilnya adalah b, maka logaritma dari b dengan basis yang sama, yaitu a, hasilnya adalah c sebagai eksponen dari a. Dapat ditulis misal $a, b, c \in R$, $0 < a < 1$, $a \neq 1$ dan $b > 0$, jika $a^c = b$ maka ${}^a\log b = c$.
6. Jika grafik fungsi eksponen dicerminkan terhadap sumbu $y = x$, maka diperoleh grafik fungsi logaritma.
7. Penguasaan berbagai konsep dan sifat-sifat eksponen dan logaritma adalah prasayarat untuk mempelajari fungsi eksponen dan fungsi logaritma sebab fungsi eksponen melibatkan bilangan eksponen dan fungsi logaritma melibatkan logaritma. Secara mendalam, berbagai sifat-sifat dari fungsi eksponen dan logaritma serta penerapannya akan dibahas dipokok bahasan peminatan.

Pada Bahasan 2 (Bab 2), kita akan mempelajari persamaan dan pertidaksamaan linier yang melibatkan variabel berpangkat satu. Sama halnya dengan penemuan kembali konsep eksponen dan logaritma melalui pemecahan masalah nyata, akan kita temukan konsep dan sifat-sifat persamaan dan pertidaksamaan linier dari berbagai

situasi nyata kehidupan disekitar kita. Penguasaan kamu pada materi eksponen dan logaritma akan berguna untuk mempelajari materi pada bab berikutnya. Perlu kami tekankan bahwa mempelajari materi matematika mulai bahasan 1 sampai 12, harus dipelajari secara terurut, jangan melompat-lompat, sebab sangat dimungkinkan penguasaan materi pada bahasan berikutnya didasari penguasaan materi pada bahasan sebelumnya.